TD$_{11}$ – Réduction des endomorphismes, Diagonalisation

Exercice 1 ★

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables et, le cas échéant, les diagonaliser

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -7 & 6 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} i+1 & 5-4i & -2i \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 2-2i & 1 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ★

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 2, \\ \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n. \end{cases}$ En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, déterminer u_n en fonction de n.

Exercice 3 ★★

Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 ★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -6 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.
2. Déterminer les espaces propres de A, A est-elle diagonalisable ?
3. En prenant $U \in E_1(A)$ non-nul obtenu précédemment déterminer X tel que $(A - I_3)X = U$
4. En déduire une matrice P telle que $A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$

Exercice 5 ★★★

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.Montrer que A est diagonalisable, la diagonaliser.
2. Soit M une matrice carrée qui commute avec A ($AM = MA$).
   (a) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$
   (b) En déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$.
3. Montrer que les matrices qui commutent avec A forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

Exercice 6 ★

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et T l'application définie sur E par : $T(f) : x \longmapsto f'(x) - xf(x)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Exercice 7 Endomorphismes nilpotents ★★

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $(f - a\,\mathrm{Id}_E)^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$ pour un certain entier p non nul et un scalaire a dans $\mathbb{K}$. Montrer que a est la seule valeur propre éventuelle de f. L'est-elle effectivement ?
2. On suppose E de dimension finie, f est-il diagonalisable ?
3. On prend maintenant $E = \mathbb{R}_n[X]$
   (a) Soit $f : P \mapsto P'$ et $g : P \mapsto P - P'$. Exprimer g en fonction de f, et en déduire que g est bijectif.
   (b) Montrer que $g^{-1} = \mathrm{Id} + f + f^2 + \cdots + f^n$.

Exercice 8 ★★

On note A, J et S les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer χ_A En déduire le spectre de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Justifier que J et S sont diagonalisables, et vérifier que $SJ = JS$.
3. On admet que $\mathrm{Sp}(S) = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$. Montrer que tout vecteur propre de S est vecteur propre de J.
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (qu'on ne demande pas de déterminer) telle que $P^{-1}SP$ et $P^{-1}JP$ soient diagonales.

Exercice 9 Des matrices non semblables ★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A et B ont même rang, même trace et mêmes valeurs propres.
2. Montrer que A et B ne sont pas semblables (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

Exercice 10 Polynômes d'Hermite ★★★

Soit $n \geqslant 2$, et soit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par $\varphi(P) = 2XP' - P''$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire les valeurs propres de φ et la dimension de ses sous-espaces propres.
3. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire H_p tel que $H_p'' - 2XH_p' + 2pH_p = 0$.
4. Montrer que pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, H_p est de degré p.

Exercice 11 ★★★

Soient a, b deux réels, avec $a \neq 0$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $u(P) = P(aX + b)$.

1. Déterminer les valeurs propres de u.
2. Montrer que si $a \notin \{-1, 1\}$, alors u est diagonalisable.
3. Si $a = 1$, quelles sont les valeurs de b pour lesquelles u est diagonalisable ?
4. On suppose à présent que $a = -1$. Montrer que $p = \dfrac{\mathrm{Id} + u}{2}$ est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que u est diagonalisable.

Exercice 12 ★★

1. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(M) = 0\}$. En déduire que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
2. Soit f l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)I_n$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant la question 1, montrer que f est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

Exercice 13 ★★★

Dans E espace euclidien de dimension 3, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on considère (v_1, v_2) une famille de deux vecteurs. On définit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \langle v_1, x\rangle v_1 + \langle v_2, x\rangle v_2 \end{array}$

1. Montrer que f est un endomorphisme et que son rang est au plus 2.
2. Montrer que $\mathrm{Rang}(f) < 2$ si et seulement si (v_1, v_2) est une famille liée.
3. f est-il diagonalisable ? si oui le diagonaliser.

Exercice 14 Réduction des endomorphismes de rang 1 ★★★

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

1. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $\alpha_n \neq 0$.
3. En déduire que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice 15 Racines carrées d'une matrice diagonalisable ★★★

Soit $C = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que si $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec C, alors D est diagonale. En déduire que si $D^2 = C$, alors D est diagonale.
2. Déterminer le nombre d'éléments $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $D^2 = C$.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre d'éléments B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tels que $B^2 = A$.

Exercice 16 Résolution d'une équation matricielle ★★★★

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. On cherche dans cet exercice à trouver toutes les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 + M = A \quad (\star)$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Soit M une solution de $(\star)$.
   (a) Vérifier que $AM = MA$.
   (b) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. Montrer que $MX \in E_\lambda(A)$, et en déduire qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $MX = \mu X$. Donner une relation entre λ et μ.
3. Déterminer toutes les solutions de $(\star)$, et donner l'unique solution dont toutes les valeurs propres sont positives.

Exercice 17 ★★★★★

Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = M + 2M^\top + 3\mathrm{Tr}(M)I_n$. f est-il diagonalisable ?

Exercice 18 ★★★★★

Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)^2$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.
2. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
3. Montrer qu'il existe une base de E formée à la fois de vecteurs propres de f et de vecteurs propres de g. Que dire des matrices de f et g dans une telle base ?
4. Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer le nombre de matrices $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$ (*i.e.* le nombre de « racines carrées »de A).

Exercices issus d'oraux

Exercice 19 ★★★★★

(*Oral 2014*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable
2. Soit M une solution. Montrer que les valeurs propres de M appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$
3. Montrer que 0 est valeur propre de M
4. Déterminer la dimension des sous-espaces propres de M
5. Déterminer les matrices M répondant au problème

Exercice 20 ★★★

(*Oral 2016*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^4
2. Déterminer les éléments propres de A et diagonaliser A dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$.
3. En déduire la diagonalisation de B.

Exercice 21 ★★★

(*Oral 2017*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de trace non-nulle. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $f_A(M) = \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Montrer que la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est $n^2 - 1$.
2. Montrer que f_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
3. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(A)$ sont chacun inclus dans un sous-espace propre de f_A.
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ et $\mathrm{Vect}(A)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
5. f_A est-il diagonalisable ?

Exercice 22 ★★★

(*Oral 2019*)

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire canoniquement associée à A.

1. Déterminer les valeurs propres de f. f est-il diagonalisable ?
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3$
3. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ à déterminer telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
4. Soit $g \in \mathscr{L}(R^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^2)$ est stable par g et que $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ est stable par g.
5. En déduire qu'il n'existe pas $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$.

Exercice 23 ★★★

(*Oral 2019*)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in E$ on pose $\phi(P) : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\ dt$

1. Montrer que ϕ est linéaire
2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ calculer $\phi(X^k)$. En déduire que ϕ est un endomorphisme de E
3. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique
4. ϕ est-elle bijective ? diagonalisable ?
5. Comparer $\phi(P')$ et $\phi(P)'$. En déduire les éléments propres de ϕ.